# Application of numerical methods to selected model equations

## Lecture 7

**Chainarong Chaktranond**

# Lecture schedule

| | |
|---|---|
| 8 - 9 | **6. Basics of discretization methods**<br>-Principle of discretization method, Truncation error, Round-off and Discretization errors, Convergence for marching problems, Stability analysis, Von Neumann analysis |
| 10 - 12 | **7. Application of numerical methods to selected model equations**<br>- Wave and Heat equations, Euler explicit and implicit methods, Second-order upwind method, Second central different method |
| 13 – 14 | **8. Application of numerical methods to selected model equations (Continue)**<br>- Laplace’s and Burges equations<br>- Adam-Bashforth and Crank-Nicolson methods<br>- Solve the matrices with ADI, SOR methods, and etc. |
| 15 - 16 | **9. Numerical techniques to solve fluid flow problems** |

# Contents

- Wave equation
- Heat equation

# Wave equations

- 1-D wave equation เป็น 2nd order hyperbolic PDE เขียนได้คือ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

สมการที่ (1) เป็นสมการเคลื่อนที่ (Propogation) ของคลื่นเสียงที่เคลื่อนที่ด้วย ความเร็วเสียง c ใน ตัวกลางที่มีคุณสมบัติอย่างเดียวกัน (Uniform medium)

สมการที่ลักษณะคล้ายคลึงกันแต่เป็น 1st order equation เขียนได้เป็น

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad c > 0 \qquad (2)$$

สมการที่ (2) เรียกกว่า 1-D linear convection equation

# Wave equations

- Schemes ที่ใช้แก้สมการ wave equation
  - Euler explicit method
  - Upstream (First-Order Upwind or Windward) Differencing Method
  - Lax method
  - Euler implicit method
  - $2^{nd}$ Upwind method
  - Time-Centered Implicit Method (Trapezoidal differencing method)
  - Runge-Kutta method

# Wave equation: Eurler explicit method

- **Simple explicit one-step method**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad c > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0 \qquad c > 0 \qquad (3)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \qquad c > 0 \qquad (4)$$

ในสมการที่ (3) ความถูกต้องอยู่ในอันดับที่ 1 (First-order accurate) นั่นคือ $\Delta$t และ $\Delta$x ดังนั้นมีค่า Truncation error เป็น *O*[$\Delta$t , $\Delta$x ]

ส่วนในสมการที่ (4) ความถูกต้องอยู่ในอันดับที่ 1 (First-order accurate) นั่นคือ $\Delta$t ดังนั้นมีค่า Truncation error เป็น *O*[$\Delta$t , $(\Delta x)^2$ ]

สมการที่ (3) และ (4) เป็น Unconditionally unstable

## Wave equation: Upwind differencing method

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+c\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{\Delta x}=0 \qquad c>0 \tag{3}$$

สมการที่ (3) สามารถทำให้ Stable โดยการแทน Forward space difference โดย Backward space difference โดยค่า c มีค่าเป็นบวก ถ้า c มีค่าเป็นลบแล้ว Forward space difference จะต้องถูกตรวจสอบเพื่อให้เกิด Stability

สำหรับค่า c มีค่าเป็นบวกเมื่อใช้ Backward space difference จะได้

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+c\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{\Delta x}=0 \qquad c>0 \tag{5}$$

สมการที่ (5) ความถูกต้องอยู่ในอันดับที่ 1 (First-order accurate) และมีค่า Truncation error เป็น $O[\Delta t , \Delta x ]$ และจาก von Neumann stability analysis แสดงว่าวิธีนี้จะ stable เมื่อ

$$0\le c\frac{\Delta t}{\Delta x}\le 0 \qquad \upsilon = c\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

# Wave equation: Lax method

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \qquad c > 0 \qquad (4)$$

สมการที่ (4) สามารถทำให้ Stable โดยการแทน $u_j^n$ ด้วย $\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right)/2$

และเรียกสมการที่ได้ว่า Lax method (Lax, 1954)

$$\frac{u_j^{n+1} - \left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right)/2}{\Delta t} + c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \qquad (6)$$

สมการที่ (6) เป็น First-order accurate ที่มี Truncation error เป็น $O[\Delta t, (\Delta x)^2/\Delta t]$ และจะ Stable เมื่อ $|\upsilon| \le 1$

สมการที่ (6) อาจจะไม่ Uniformly consistent เนื่องจาก $(\Delta x)^2/\Delta t$ อาจจะไม่เข้าสู่ศูนย์ ขณะที่ $\Delta t$ และ $\Delta x$ เข้าสู่ศูนย์

# Wave equation: Euler implicit method

สมการ Wave equation สมการ (3) สามารถแทนด้วย Euler implicit method

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+c\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}=0 \qquad (7)$$

สมการที่ (7) ความถูกต้องอยู่ในอันดับที่ 1 (First-order accurate) และ มีค่า Truncation error เป็น $O[\Delta t, (\Delta x)^2]$

จาก Fourier stability analysis สมการนี้เป็น unconditionally stable ทุกขั้นเวลา

# Wave equation: MacCormack method

- วิธี MacCormack method (MacCormack, 1969) นิยมใช้มากในการแก้สมการทางของไหลและ Nonlinear PDEs
- วิธีนี้ถูกพัฒนามาจากวิธี Lax-Wendroff scheme ซึ่งขจัดความจำเป็นที่ต้องคำนวณตัวที่ไม่รู้ค่าที่จุด j+1/2 และ j-1/2
- เมื่อใช้กับปัญหา linear wave equation และ ใช้ explicit method รูปสมการเขียนได้เป็น

Predictor:

$$\overline{u}_j^{n+1} = u_j^n - c\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_j^n\right) \qquad (8)$$

Corrector:

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left[u_j^n + \overline{u}_j^{n+1} - c\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\overline{u}_j^{n+1} - \overline{u}_{j-1}^{n+1}\right)\right] \qquad (9)$$

เทอม $\overline{u}_j^{n+1}$ เป็นค่าชั่วคราวที่ถูกคาดการณ์ (Temporary predicted value) ของ u ที่เวลา n+1 โดยใช้ Forward difference และ ขณะที่สมการ corrector ถูกใช้เพื่อหาค่าสุดท้ายของ u ที่เวลา n+1โดยใช้ Backward difference

# Wave equation: Second-order upwind method

Second-order upwind method (Warming and Beam, 1975) เป็นการพัฒนาจาก MacCormack method ซึ่งใช้ Backward differencing method ในส่วนทั้ง Predictor step และ corrector step สำหรับค่า c > 0

Predictor:

$$\bar{u}_j^{n+1} = u_j^n - c\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right) \tag{10}$$

Corrector:

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left[u_j^n + \bar{u}_j^{n+1} - c\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_{j-1}^{n+1}\right) - c\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_j^n - 2u_{j-1}^n + 2u_{j-2}^n\right)\right] \tag{11}$$

การเพิ่ม second backward difference ในสมการที่ (11) ทำให้ scheme ของ second-order accurate มีค่า T.E. เป็น $O[(\Delta t)^2, (\Delta t)(\Delta x), (\Delta x)^2]$ ถ้าสมการ (10) ถูกแทนในสมการที่ (10) รูปสมการกลายเป็น

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \upsilon\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right) + \frac{1}{2}c\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(c\frac{\Delta t}{\Delta x} - 1\right)\left(u_j^n - 2u_{j-1}^n + 2u_{j-2}^n\right) \tag{12}$$

# Wave equation: Time-Centered Implicit method

วิธีTime-Centered Implicit method อาจเรียกอีกอย่างว่า (Trapezoidal differencing method) เป็นวิธีที่มีความถูกต้องเป็นอันดับสอง หรือ Second-order accurate implicit scheme และคำนวณได้จากการใช้ Taylor-series expansion 2 ชุด คือ

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \left(u_t\right)_j^n + \frac{\left(\Delta t\right)^2}{2}\left(u_{tt}\right)_j^n + \frac{\left(\Delta t\right)^3}{6}\left(u_{ttt}\right)_j^n + \cdots \qquad (13)$$

$$u_j^n = u_j^{n+1} - \Delta t \left(u_t\right)_j^{n+1} + \frac{\left(\Delta t\right)^2}{2}\left(u_{tt}\right)_j^{n+1} - \frac{\left(\Delta t\right)^3}{6}\left(u_{ttt}\right)_j^{n+1} + \cdots \qquad (14)$$

เมื่อแทนสมการ (13) ด้วย $\left(u_{tt}\right)_j^{n+1} = \left(u_{tt}\right)_j^n + \Delta t \left(u_{ttt}\right)_j^n + \cdots$

จะได้

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{2}\left[\left(u_t\right)^n + \left(u_t\right)^n\right]_j + O\left[\left(\Delta t\right)^3\right] \qquad (15)$$

# Wave equation: Time-Centered Implicit method

สมการ (15) จะมีลักษณะเหมือนสูตรสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal differencing) หรือเรียกอีกอย่างว่า Crank-Nicolson differencing ซึ่งเป็น unconditional stable ที่ทุก time step

# Heat equation

**สมการความร้อน 1 มิติ (สมการการแพร่, Diffusion equation)**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (16)$$

เป็นสมการอนุพันธ์ย่อยแบบพาราโบลิค (Parabolic PDE) ซึ่งในสมการที่ (16) เป็นสมการควบคุมสำหรับสมการนำความร้อนหรือสมการการแพร่ในตัวกลางที่คุณสมบัติเหมือนกันแบบ 1 มิติ (1-D isotropic medium) นอกจากสมการนี้ยังใช้จำลอง (Model) ลักษณะการไหลที่ยังพัฒนาเต็มที่ของสมการเบาวดารี่เรเยอร์แบบพาราโบลิค (Parabolic boundary-layer equation) อีกด้วย

# Heat equation

เมื่อเงื่อนไขเริ่มต้นกำหนดให้เป็น $u(x,0) = f(x)$

เมื่อเงื่อนไขขอบเขตกำหนดให้เป็น $u(0,t) = u(1,t) = 0$

**สมการแม่นตรง (Exact solution) คือ** $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\alpha k^2 t} \sin(kx) \qquad (17)$$

ที่ซึ่ง $A_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(kx)\,dx$ และ $k = n\pi$

สมการ (16) สามารถถูกหาคำตอบด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องวิธีต่างเช่น

- Simple explicit method
- Richardson's method
- Crank-Nicloson method
- etc.,

# Simple explicit method

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+\alpha\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

ค่าความถูกต้อง (First-order accurate) มีค่า T.E. เป็น $O[\Delta t\ ,\ (\Delta t)^2]$
ที่สภาวะคงตัวค่าความถูกต้องอยู่ในอันดับ $O[(\Delta x)^2\ ]$ และวิธีนี้จะเสถียร (Stable) เมื่อ

$$0\le r\le\frac{1}{2}$$

ที่ซึ่ง $$r=\frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

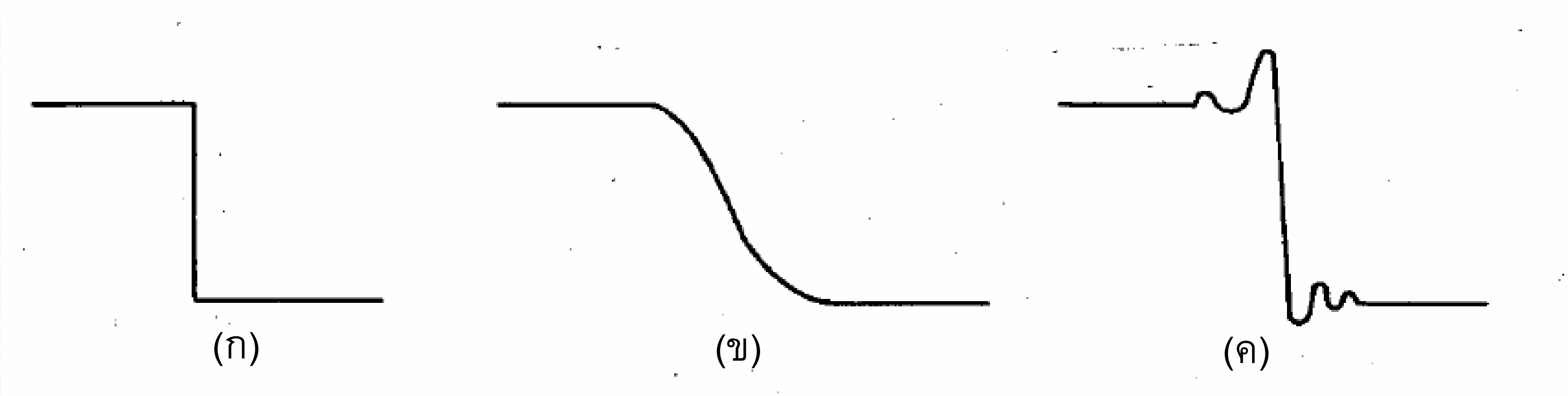
และสมการปรับปรุง (Modified equation) เขียนได้เป็น

$$u_t-\alpha u_{xx}=\left[-\frac{1}{2}\alpha^2\Delta t+\frac{\alpha(\Delta x)^2}{12}\right]u_{xxxx}$$

$$+\left[\frac{1}{3}\alpha^3(\Delta t)^2-\frac{1}{12}\alpha^2\Delta t(\Delta x)^2+\frac{1}{360}\alpha(\Delta x)^4\right]u_{xxxxxx}+\cdots \qquad (18)$$

# Simple explicit method

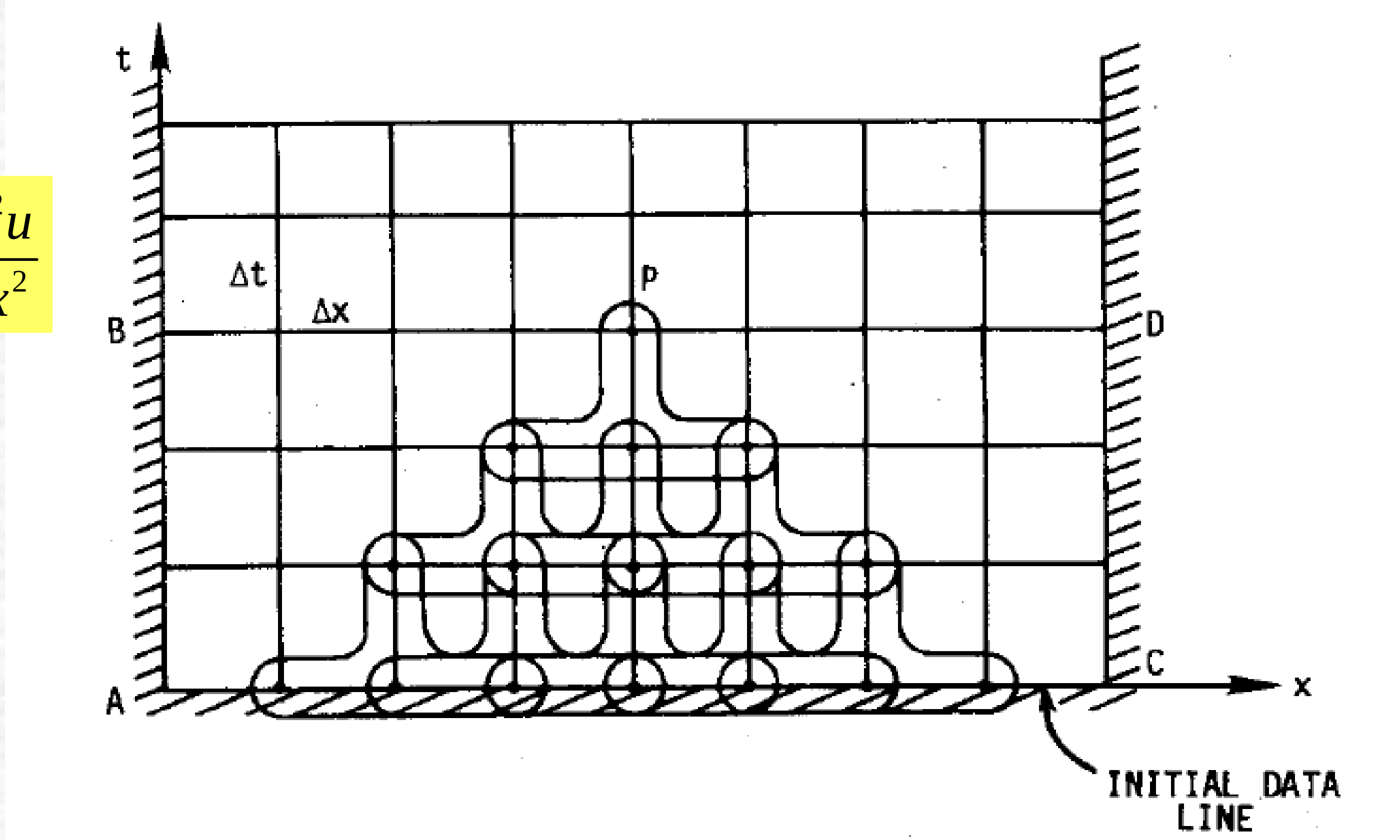
ถ้า r = 1/6 ค่าความพลาด T.E. จะกลายเป็น $O[(\Delta t)^2, (\Delta x)^4]$ นอกจากนี้ยังสังเกตเห็นว่าเทอมของอนุพันธ์ที่เป็นเลขคี่ (Odd derivative terms) จะไม่ปรากฏอยู่ในใน T.E. ซึ่งทำให้ลดค่าความผิดพลาดในสมการความร้อน และค่าความผิดพลาดเนื่องจากเทอมอนุพันธ์เลขคี่ มีชื่อว่า ความผิดพลาดเนื่องจากการแพร่กระจาย (Dispersive error) ซึ่งทำให้ค่าคำตอบเกิดความบิดเบี้ยว (Distort) ระหว่างเฟส ดังแสดงในรูป ค  ส่วนในรูป (ข) เป็นผลเนื่องจากเทอมอนุพันธ์ที่เป็นเลขคู่ (Even derivative)




ค่าผิดพลาดแบบต่างๆ (ก) คำตอบแม่นตรง (ข) ผลความบิดเบี้ยวจาก Dissipation error (จากการใช้ 1st order method) และ (ค) ผลบิดเบี้ยวจาก Dispersion error (จากการใช้ 2nd method)

# Simple explicit method

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$




- เมื่อใช้ explicit scheme ค่า u ที่จุด p สามารถหาค่าได้โดยไม่ต้องใช้เงื่อนไขขอบเขตของ AB และ CD
- ดังนั้น explicit scheme ไม่เหมาะสมกับ สมการความร้อนหรือสมการอนุพันธ์แบบพาราโบลิคเพราะจำเป็นต้องใช้เงื่อนไขขอบเขต

## Richardson's Method

ปี 1910 Richardson ได้นำเสนอการแก้สมการความร้อนโดยใช้ explicit one-step three-time-level scheme

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = \alpha \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \qquad (19)$$

Scheme นี้ให้ความถูกต้องแบบอนุพันธ์อันดับสอง (Second-order accurate) ด้วยค่า T.E. เป็น $O[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2]$ แต่วิธีนี้มีความเสถียรเป็นแบบ Unconditionally unstable และไม่ถูกพิสูจน์แล้วว่าไม่สามารถแก้ปัญหาสมการความร้อนได้

# Simple implicit (Laasonen) method

ปี 1949 Laasonen ได้นำเสนอการแก้สมการความร้อนโดยใช้ Simple implicit scheme ซึ่งมีรูปแบบคือ

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \tag{20}$$

ถ้าเราใช้ Central-difference operator

$$\delta_x^2 u_j^n = u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n \tag{21}$$

ดังนั้นสมการที่ (20) สามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \alpha \frac{\delta_x^2 u_j^{n+1}}{(\Delta x)^2} \tag{22}$$

Scheme นี้มีค่าความถูกต้องเป็นอนุพันธ์อันดับที่ 1 (1$^{st}$ order accuracy) ที่มีค่า T.E. เป็น $O\,[t,(\Delta x)^2\,]$ และเป็น Unconditionally stable

# Crank-Nicolson method

ปี 1947 Crank และ Nicolson ได้นำเสนอการแก้สมการความร้อนโดยใช้ Implicit algorithm ซึ่งมีรูปแบบ คือ

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \alpha \frac{\delta_x^2 u_j^n + \delta_x^2 u_j^{n+1}}{2\left(\Delta x\right)^2} \tag{23}$$

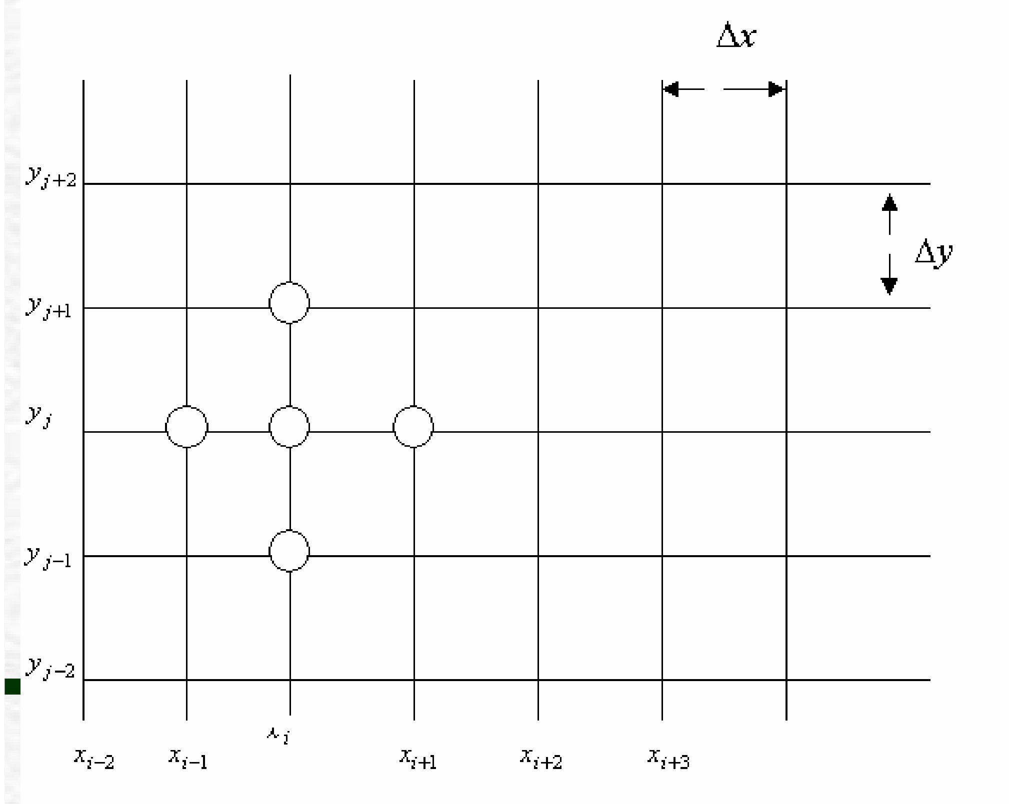
Scheme เป็น Unconditionally stable algorithm และเป็นที่นิยมใช้โดยรู้จักในชื่อ Crank-Nicolson scheme

Scheme ใช้หลักการของ Trapezoidal differencing เพื่อให้ได้ความถูกต้อง $2^{nd}$ order accuracy ที่มี T.E. เป็น $O\,[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2]$

# การแก้สมการความร้อนแบบ 2 มิติ

สมการความร้อนแบบ 2 มิติ
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (24)$$

เมื่อใช้ Explicit method จะได้
$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} = \alpha\left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2}\right) \qquad (25)$$




ที่ซึ่ง $x = i\Delta x$ และ $y = j\Delta y$

Stable เมื่อ (จาก Fourier analysis)

$$\alpha\Delta t\left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}\right] \le \frac{1}{2}$$

# การแก้สมการความร้อนแบบ 2 มิติ

ถ้า $(\Delta x)^2 = (\Delta y)^2$ เงื่อนไขของความเสถียรจะเกิดขึ้นเมื่อ $r \le \dfrac{1}{4}$

เมื่อใช้ Crank-Nicolson scheme จะได้

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} = \frac{\alpha}{2}\left(\hat{\delta}_x^2 + \hat{\delta}_y^2\right)\left(u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j}^{n}\right) \qquad (26)$$

ที่ซึ่ง

$$\hat{\delta}_x^2 u_{i,j}^n = \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} = \frac{\delta_x^2 u_{i,j}^n}{(\Delta x)^2}$$

$$\hat{\delta}_y^2 u_{i,j}^n = \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} = \frac{\delta_y^2 u_{i,j}^n}{(\Delta y)^2}$$

# การแก้สมการความร้อนแบบ 2 มิติ

จากสมการ (26) เขียนได้เป็น

$$au_{i,j-1}^{n+1} + bu_{i-1,j}^{n+1} + cu_{i,j}^{n+1} + bu_{i+1,j}^{n+1} + au_{i,j+1}^{n+1} = d_{i,j}^{n} \qquad (27)$$

ที่ซึ่ง

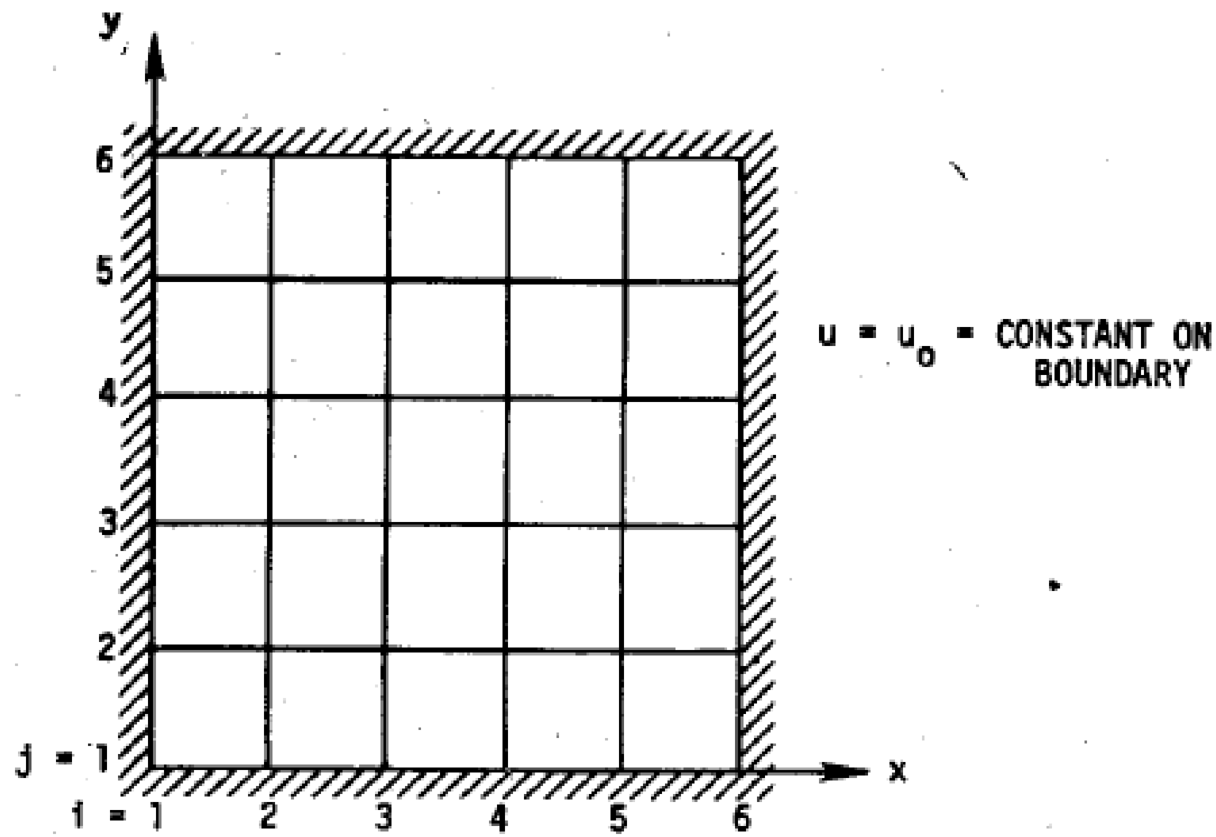
$$a = -\frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta y)^2} = -\frac{1}{2} r_y$$

$$b = -\frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta x)^2} = -\frac{1}{2} r_x$$

$$c = 1 + r_x + r_y$$

$$d_{i,j}^{n} = u_{i,j}^{n} + \frac{\alpha \Delta t}{2}\left(\hat{\delta}_x^2 + \hat{\delta}_y^2\right) u_{i,j}^{n}$$

เมื่อกำหนดให้ Computational mesh มีค่า 6×6



เมื่อกำหนดให้ Computational mesh มีค่า 6×6 ดังนั้นเขียนเมตริกซ์ได้เป็น

$$
\begin{bmatrix}
c & b & 0 & 0 & a & 0 & & & & & & & & & & 0 \\
b & c & b & & & a & & & & & & & & & & \\
0 & b & c & b & & & a & & & & & & & & & \\
0 & & b & c & 0 & & & a & & & & & & & & \\
a & & & 0 & c & b & & & a & & & & & & & \\
0 & a & & & b & c & b & & & a & & & & & & \\
& & a & & & b & c & b & & & a & & & & & \\
& & & a & & & b & c & 0 & & & a & & & & \\
& & & & a & & & 0 & c & b & & & a & & & \\
& & & & & a & & & b & c & b & & & a & & \\
& & & & & & a & & & b & c & b & & & a & 0 \\
& & & & & & & a & & & b & c & 0 & & & a \\
& & & & & & & & a & & & 0 & c & b & & 0 \\
& & & & & & & & & a & & & b & c & b & 0 \\
& & & & & & & & & & a & & & b & c & b \\
0 & & & & & & & & & & 0 & a & 0 & 0 & b & c
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_{2,2}^{n+1} \\ u_{3,2}^{n+1} \\ u_{4,2}^{n+1} \\ u_{5,2}^{n+1} \\ u_{2,3}^{n+1} \\ u_{3,3}^{n+1} \\ u_{4,3}^{n+1} \\ u_{5,3}^{n+1} \\ u_{2,4}^{n+1} \\ u_{3,4}^{n+1} \\ u_{4,4}^{n+1} \\ u_{5,4}^{n+1} \\ u_{2,5}^{n+1} \\ u_{3,5}^{n+1} \\ u_{4,5}^{n+1} \\ u_{5,5}^{n+1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
d_{2,2}''' \\ d_{3,2}' \\ d_{4,2}' \\ d_{5,2}''' \\ d_{2,3}'' \\ d_{3,3} \\ d_{4,3} \\ d_{5,3}'' \\ d_{2,4}'' \\ d_{3,4} \\ d_{4,4} \\ d_{5,4}'' \\ d_{2,5}''' \\ d_{3,5}' \\ d_{4,5}' \\ d_{5,5}'''
\end{bmatrix}
$$

ที่ซึ่ง

$$d' = d - au_0$$

$$d'' = d - bu_0$$

$$d''' = d - (a+b)u_0$$

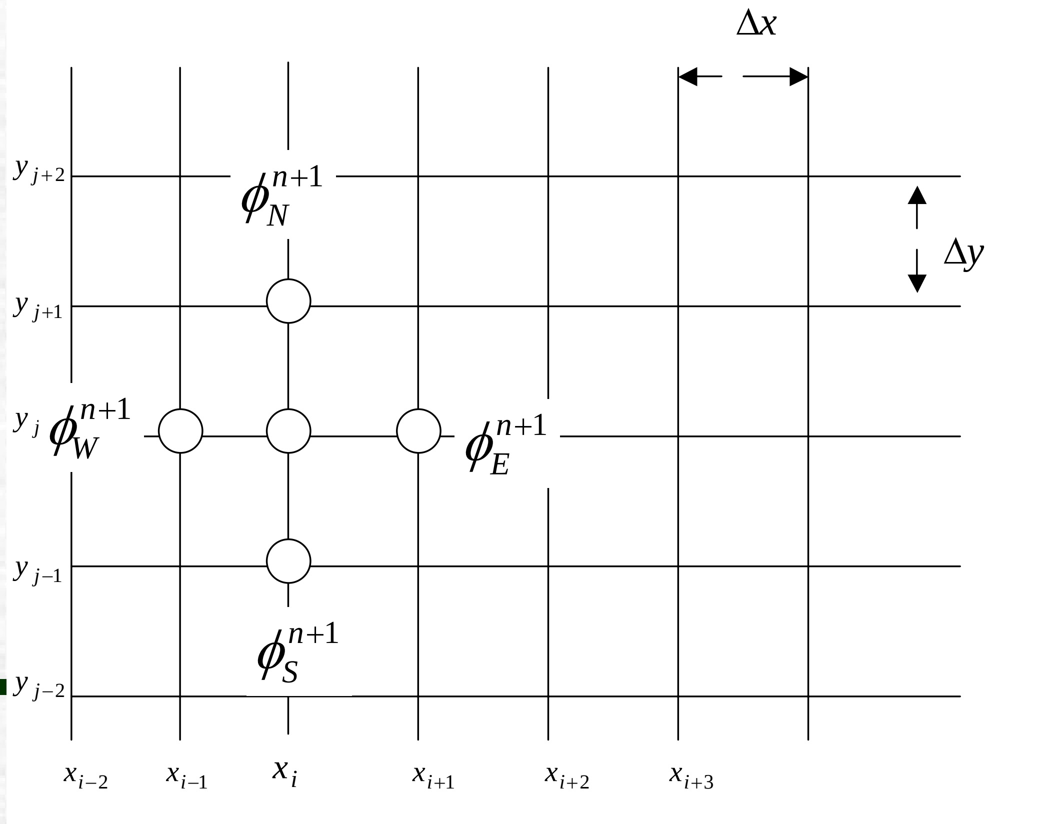
# Successive over relaxation method (SOR)

เป็นวิธีการหาคำตอบโดยการแทนสุ่มค่าคำตอบลงในสมการ โดยเขียนรูปสมการได้เป็น

$$\phi_p^{n+1} = \omega \frac{Q_p - A_S\phi_S^{n+1} - A_W\phi_W^{n+1} - A_N\phi_N^{n+1} - A_E\phi_E^{n+1}}{A_p} + (1-\omega)\phi_p^n \quad (28)$$

ที่ซึ่ง $\omega$ คือค่า Over-relaxation factor และมีค่ามากกว่า 1 (ถ้าเท่ากับ 1 รูปสมการจะกลายเป็น Gauss Seidel method)

$n$ คือค่า iteration counter



# Alternating Direction Implicit method (ADI)

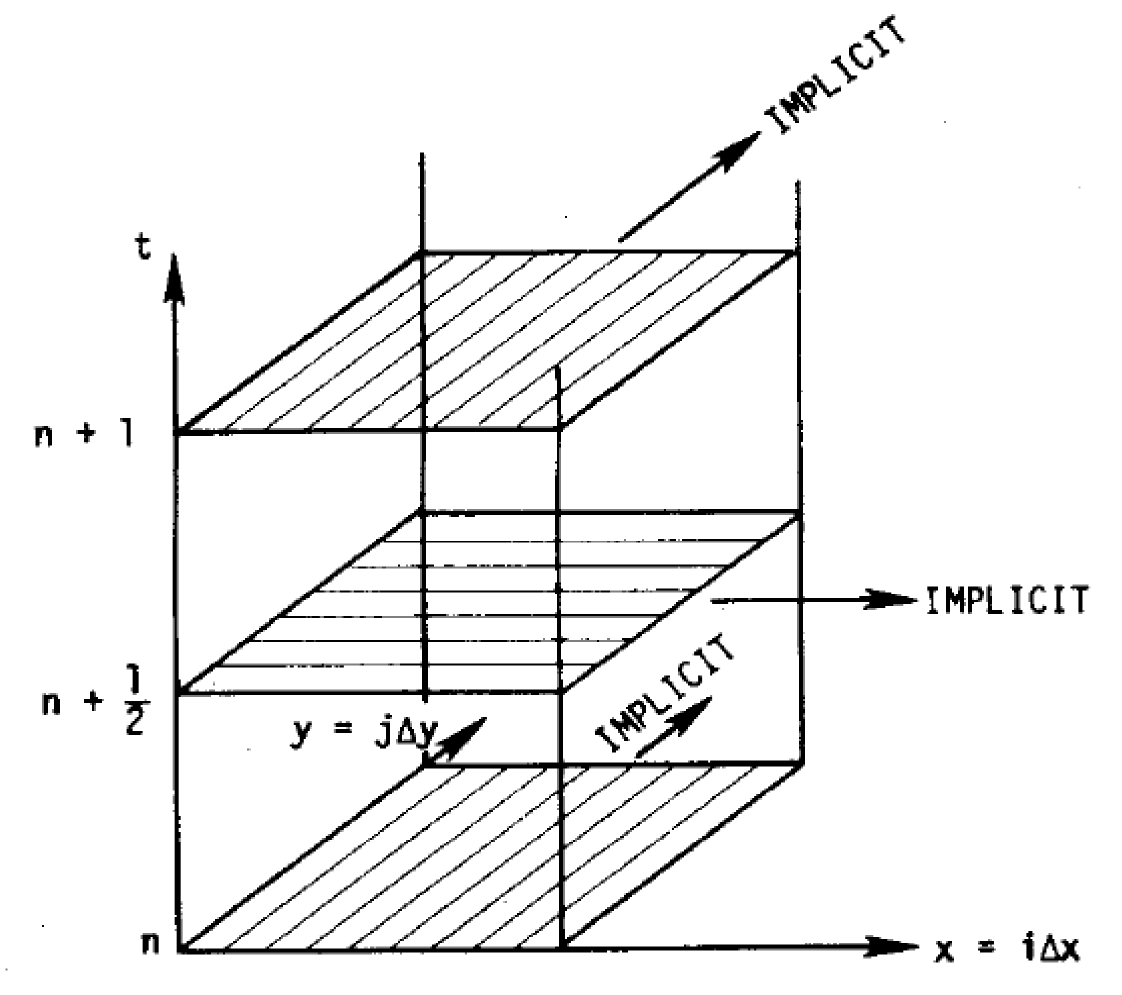
ปี 1955 Peaceman ,Rachford และ Douglas ได้นำเสนอวิธีแก้สมการแบบ ADI ซึ่งประกอบด้วย 2 ขั้นตอนคือ

ขั้นตอนที่ 1
$$\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t/2} = \frac{\alpha}{2}\left( \hat{\delta}_x^2 u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \hat{\delta}_y^2 u_{i,j}^{n} \right) \tag{29a}$$

ขั้นตอนที่ 2
$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} = \frac{\alpha}{2}\left( \hat{\delta}_x^2 u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \hat{\delta}_y^2 u_{i,j}^{n+1} \right) \tag{29b}$$

วิธี ADI ให้ค่าความถูกต้องอันดับสอง ($2^{nd}$ accurate) ด้วย T.E. มีค่า $O\,[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2]$ และเป็นวิธีที่ให้ Unconditionally stable

# Alternating Direction Implicit method (ADI)




จากสมการที่ (29) จะเห็นว่าการแก้สมการจะแยกเป็น 2 ขั้น (Splitting) โดยใน

**<u>ขั้นตอนที่ 1</u>** เมตริกซ์แบบ 3 แถวในแนวแทยงจะถูกหาค่าในแต่ละตำแหน่งของของแถว j และ

**<u>ขั้นตอนที่ 2</u>** เมตริกซ์แบบ 3 แถวในแนวแทยงจะถูกหาค่าในแต่ละตำแหน่งของแถว i ดังแสดงในรูป

# Alternating Direction Implicit method (ADI)

**ขั้นตอนที่ 1**

$$\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-u_{i,j}^{n}}{\Delta t/2}=\frac{\alpha}{2}\left(\hat{\delta}_x^2 u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+\hat{\delta}_y^2 u_{i,j}^{n}\right) \tag{29a}$$

$$\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-u_{i,j}^{n}}{\Delta t/2}=\alpha\left(\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x\right)^2}+\frac{u_{i,j-1}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i,j+1}^{n}}{\left(\Delta y\right)^2}\right) \tag{30}$$

$$-\alpha\frac{\Delta t}{2\left(\Delta y\right)^2}u_{i,j-1}^{n}+\left(1+\alpha\frac{\Delta t}{\left(\Delta x\right)^2}\right)u_{i,j}^{n}-\alpha\frac{\Delta t}{2\left(\Delta y\right)^2}u_{i,j+1}^{n} \tag{31}$$

$$=\alpha\frac{\Delta t}{2\left(\Delta x\right)^2}u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-\left(1+\alpha\frac{\Delta t}{\left(\Delta x\right)^2}\right)u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}\alpha\frac{\Delta t}{2\left(\Delta x\right)^2}u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}$$

ซึ่งจะเห็นว่าเทอมทางซ้ายของสมการ (31) เป็นตัวแปรที่รู้ค่า ส่วนเทอมทางขวาของสมการ (31) เป็นตัวไม่รู้ค่าและมีเพียง 3 เทอมดังนั้นจะได้เมตริกซ์เป็นรูป 3 แถวในแนวแทยง

# Alternating Direction Implicit method (ADI)

**ขั้นตอนที่ 2**

$$\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2}=\frac{\alpha}{2}\left(\hat{\delta}_x^2 u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+\hat{\delta}_y^2 u_{i,j}^{n+1}\right) \tag{29b}$$

$$\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2}=\alpha\left(\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\Delta x\right)^2}+\frac{u_{i,j+1}^{n+1}-2u_{i,j}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n+1}}{\left(\Delta y\right)^2}\right) \tag{32}$$

$$\alpha\frac{\Delta t}{2\left(\Delta x\right)^2}u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-\left(1+\alpha\frac{\Delta t}{\left(\Delta x\right)^2}\right)u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+\alpha\frac{\Delta t}{2\left(\Delta x\right)^2}u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}$$
$$=-\alpha\frac{\Delta t}{2\left(\Delta y\right)^2}u_{i,j+1}^{n+1}+\left(1+\alpha\frac{\Delta t}{\left(\Delta x\right)^2}\right)u_{i,j}^{n+1}-\alpha\frac{\Delta t}{2\left(\Delta y\right)^2}u_{i,j-1}^{n+1} \tag{33}$$

ซึ่งจะเห็นว่าเทอมทางซ้ายของสมการ (33) เป็นตัวแปรที่รู้ค่าแล้ว (หาได้จากขั้นตอนที่ 1 ส่วนเทอมทางขวาของสมการ (33) เป็นตัวไม่รู้ค่าและมีเพียง 3 เทอมดังนั้นจะได้เมตริกซ์เป็นรูป 3 แถวในแนวแทยง

# Alternating Direction Implicit method (ADI)

**ขั้นตอนที่ 1**

$$\boxed{-\alpha\frac{\Delta t}{2(\Delta y)^2}u_{i,j-1}^{n}+\left(1+\alpha\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right)u_{i,j}^{n}-\alpha\frac{\Delta t}{2(\Delta y)^2}u_{i,j+1}^{n}}$$ ตัวแปรที่รู้ค่า

ตัวแปรที่ไม่รู้ค่า $$\boxed{=\alpha\frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-\left(1+\alpha\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right)u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+\alpha\frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}\qquad(31)$$

จากสมการที่ (31) เป็น Implicit method และ เราสามารถจัดเมตริกซ์ได้เป็นเมตริกซ์สามแถวในแนวแทยง (TDMA)

$$a=\alpha\frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}$$

$$b=-\left(1+\alpha\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right)$$

$$c=\alpha\frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}$$

$$\Rightarrow\quad\begin{bmatrix} b & c & & & & & & \\ a & b & c & & & & & \\ & a & b & c & & & & \\ & & a & b & c & & & \\ & & & a & b & c & & \\ & & & & a & b & c & \\ & & & & & a & b & c \\ & & & & & & a & b \end{bmatrix}\left\{u_{i,j}^{n+1/2}\right\}=\left\{d_{i,j}^{n}\right\}$$

# Alternating Direction Implicit method (ADI)

**<u>ขั้นตอนที่ 2</u>**

$$\alpha\frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-\left(1+\alpha\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right)u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+\alpha\frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}$$ ตัวแปรที่รู้ค่า (33)

ตัวแปรที่ไม่รู้ค่า
$$=-\alpha\frac{\Delta t}{2(\Delta y)^2}u_{i,j+1}^{n+1}+\left(1+\alpha\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right)u_{i,j}^{n+1}-\alpha\frac{\Delta t}{2(\Delta y)^2}u_{i,j-1}^{n+1}$$

จากสมการที่ (33) เป็น Implicit method และ เราสามารถจัดเมตริกซ์ได้เป็นเมตริกซ์สามแถวในแนวแทยง (TDMA)

$$a=-\alpha\frac{\Delta t}{2(\Delta y)^2}$$

$$b=\left(1+\alpha\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right)$$

$$c=-\alpha\frac{\Delta t}{2(\Delta y)^2}$$

$$\Rightarrow\quad\begin{bmatrix} b & c & & & & & & \\ a & b & c & & & & & \\ & a & b & c & & & & \\ & & a & b & c & & & \\ & & & a & b & c & & \\ & & & & a & b & c & \\ & & & & & a & b & c \\ & & & & & & a & b \end{bmatrix}\left\{u_{i,j}^{n+1}\right\}=\left\{d_{i,j}^{n*}\right\}$$

# Laplace's equation

สมการ Laplace equation เป็นแบบจำลองของสมการอนุพันธ์แบบอิลิปติค (Elliptic PDE) และสำหรับปัญหา 2 มิติสมการลาปลาซเขียนได้เป็น

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (34)$$

ปัญหาที่ใช้แบบจำลองสมการลาปลาซส่วนใหญ่จะเป็นปัญหาที่สภาวะคงตัว (Steady state) เช่น ปัญหาการกระจายตัวของอุณหภูมิในของแข็ง (Steady-state temperature distribution) และปัญหาที่การไหลแบบอัดตัวไม่ได้และไม่เกิดการหมุน (Incompressible irrotational (Potential) flow of a fluid)

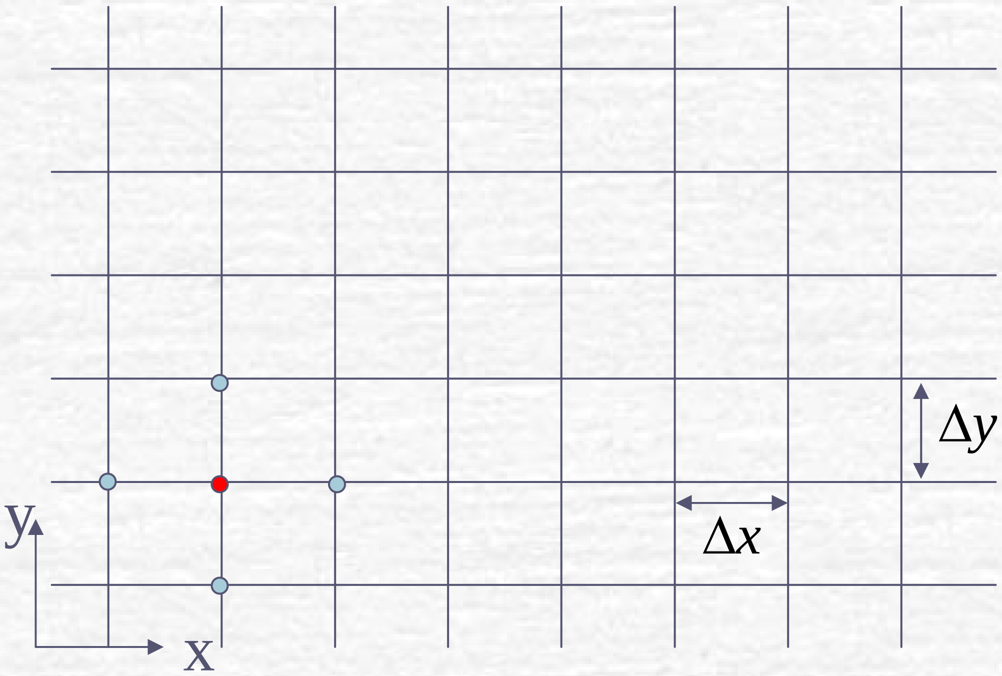
และเมื่อเทอมทางขวามือของสมการ (34) มีค่าไม่เป็นศูนย์แล้ว สมการจะกลายเป็นสมการปัวซอง (Poisson equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y\right) \qquad (35)$$

# Laplace's equation

การแก้สมการ Laplace equation ด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite difference representation) ใช้ข้อมูล 5 ตำแหน่ง คือ

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0 \qquad (36)$$




จากสมการ (36) จะได้ว่าค่า T.E. มีค่า $O\,[(\Delta x)^2, (\Delta y)^2]$

# Navier-Stokes equation

สมการนาเวียร์-สโต๊ค (Navier-Stokes equation) เป็นสมการที่มีความไม่เป็นเชิงเส้นสูงมาก (Highly Non-linear equation)

Other body forces

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\vec{V}\right)=-\nabla p+\mu\nabla^2\vec{V}+\vec{f} \qquad (37)$$

Unsteady acceleration

Convective acceleration

Pressure gradient

Viscosity

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \qquad (38)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

# Navier-Stokes equation

สำหรับการไหลอุดมคติ (Ideal fluid flow) หรือไม่มีความหนืด (Inviscid flow or No shear stress flow)

$$\mu = 0$$

สมการนาเวียร์สโต๊ค แบบไม่มีความหนืดเขียนได้เป็น

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\vec{V}\right)=-\nabla p+\vec{f} \tag{39}$$

และเมื่อพิจารณาการไหลที่สภาวะแบบคงตัว (Steady state) แล้วจะได้ สมการที่เรียกว่า Euler equation

$$\frac{P_1}{\rho}+\frac{v_1^2}{2}+gz_1=\frac{P_2}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}+gz_2 \tag{40}$$

# Assignment 6

จงแสดงการพิสูจน์การได้มาของสมการออย์เลอร์ (Euler equation)  โดยเริ่มต้นจาก สมการนาเวียร์สโต๊ค

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\vec{V}\right)=-\nabla p+\mu\nabla^2\vec{V}+\vec{f} \qquad (37)$$

$$\frac{P_1}{\rho}+\frac{v_1^2}{2}+gz_1=\frac{P_2}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}+gz_2 \qquad (40)$$

# Burgers' equation

ปี 1948 Burgers ได้นำเสนอสมการ

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (41)$$

Time-dependent term

Convective term

Diffusive or dissipative term

และเรียกสมการที่ (38) ว่า Burgers' equation และเมื่อเทอมของความหนืดซึ่งอยู่ทางด้านขวาของสมการหายไป ($\mu$ = 0) จะเรียกว่า Inviscid Burgers' equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (42)$$

ซึ่งสมการที่ (41) จากกลายเป็นสมการออย์เลอร์ (Simple Euler equation) และมีรูปเหมือนสมการคลื่น (Wave equation)

# Navier-Stokes equation

จากสมการที่ (39) เราสามารถ Discretize ได้เป็น

$$\rho\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+\frac{\rho}{2}\underbrace{\left(3\frac{u_i^n-u_{i-1}^n}{\Delta x}-\frac{u_i^{n-1}-u_{i-1}^{n-1}}{\Delta x}\right)}_{\text{Adams-Bashforth scheme}}=-\frac{\left(p_i^{n+1}-p_i^n\right)}{\Delta x}+\frac{\mu}{2}\underbrace{\left(\frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{\left(\Delta x\right)^2}+\frac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{\left(\Delta x\right)^2}\right)}_{\text{Crank-Nicolson scheme}} \tag{43}$$

จากสมการที่ (43) จะเห็นว่า ขั้นตอนของการแก้สมการมีความซับซ้อนมากขึ้นเนื่องจากตัวแปรที่ต้องการหาค่า 2 ตัวคือ ความเร็ว (u) และ ความดัน (p) ดังนั้นเพื่อลดปัญหาดังกล่าว Chorin (1969) ได้เสนอวิธีแก้สมการที่เรียกว่า Fractional step method (รายละเอียดแสดงดัง Kim J., and Moin,P. (1985). Application of a fractional step method to incompressible Navier-Stokes equations. J. Computational Physics, 59, pp.308-323)

# Splitting or Fractional-step methods

วิธี Fractional-step method จะมีความคล้ายคลึงกับวิธี Alternating Direction Implicit method กล่าวคือ การแก้สมการจะถูกแบ่งช่วงเวลาเป็น 2 ช่วงเท่าๆ กัน โดยทำการแก้สมการตัวแปรหนึ่งก่อน แล้วจึงแก้สมการหาตัวแปรที่เหลือ

**<u>ขั้นตอนที่ 1</u>**

$$\frac{u_{i,j}^{n+1/2} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} = \alpha \hat{\delta}_x^2 u_{i,j}^{n+1/2} \quad (44a)$$

**<u>ขั้นตอนที่ 2</u>**

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t} = \alpha \hat{\delta}_y^2 u_{i,j}^{n+1/2} \quad (44b)$$

วิธี Fractional-step method จะให้ค่าความถูกต้องด้วย T.E. $O\,[\Delta t, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2]$

# Dimensionless equation

การทำสมการที่ต้องการแก้สมการให้อยู่ในรูปตัวแปรไร้มิติมีประโยชน์ คือ

- ลดปัญหาตัวเลขที่ต้องการเก็บเพื่อใช้ในการคำนวณ
- ทำให้สมการมีรูปง่ายขึ้น
- ใช้เปรียบเทียบผลกับการคำนวณหรือการทดลองอื่นที่มิติที่แตกต่างกัน

สำหรับสมการนาเวียร์-สโต๊ค การทำเป็นรูปตัวแปรไร้มิติมีดังนี้

$$u^* = \frac{u}{u_\infty} \longleftarrow \text{Velocity scale}$$

$$x^* = \frac{x}{L} \longleftarrow \text{Length scale}$$

$$p^* = \frac{p}{\rho u_\infty^2} \longleftarrow \text{Pressure scale}$$

$$t^* = \frac{L}{u_\infty} \longleftarrow \text{Time scale}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x_j^*} u_i^* u_j^* = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j^*} \frac{\partial}{\partial x_j^*} u_i^* \qquad (45)$$

ที่ซึ่ง $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho u_\infty L}{\mu}$

# การใช้ Splitting or Fractional-step methods

การใช้ Fractional-step method เพื่อแก้ปัญหา incompressible fluid ซึ่งประกอบสมการนาเวียร์-สโต๊ค และสมการของความต่อเนื่อง

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*}+\frac{\partial}{\partial x_j^*}u_i^* u_j^* = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial x_j^*}\frac{\partial}{\partial x_j^*}u_i^* \quad (45)$$

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i^*}=0$$

เพื่อให้ง่ายต่อการแสดงสมการ ในที่นี้เราจะละทิ้ง * ในแต่ละเทอมและใช้ Fractional-step method ได้เป็น

$$\frac{\hat{u}_i-u_i^n}{\Delta t}=-\frac{1}{2}\left(3\frac{u_i^n-u_{i-1}^n}{\Delta x}-\frac{u_i^{n-1}-u_{i-1}^{n-1}}{\Delta x}\right)=\frac{1}{2\,\mathrm{Re}}\left(\frac{\hat{u}_{i+1}-2\hat{u}_i+\hat{u}_{i-1}}{(\Delta x)^2}+\frac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}\right) \quad (46a)$$

$$\frac{u_i^{n+1}-\hat{u}_i}{\Delta t}=-\nabla\left(\phi^{n+1}\right) \quad (46b)$$

Virtual pressure

ที่ซึ่ง Correction pressure

$$p=\phi+\frac{\Delta t}{2}\mathrm{Re}\nabla^2\phi \quad (46c)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \quad (47)$$

# การใช้ Splitting or Fractional-step methods

จากสมการ (46b) และ (47) จะได้ว่า

$$\nabla^2\left(\phi^{n+1}\right)=\frac{1}{\Delta t}\nabla\widehat{u}_i \tag{48}$$

ดังนั้นหลังจากแก้สมการ (46a) แล้ว สมการ (48) ก่อนที่นำมาแก้สมการ (46b) และสุดก็นำมาแทนค่าใน สมการ (46c) เพื่อหาค่าที่แท้จริงของความดันต่อไป

# Assignment 7

จงพิสูจน์ว่า จากสมการนาเวียร์-สโต๊ค ที่แก้สมการโดยใช้ Fractional-step method ในสมการที่ (46a) (46b) และ (47) ทำให้สมการที่ (48) เป็นจริง

$$\frac{\hat{u}_i - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{2}\left(3\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} - \frac{u_i^{n-1} - u_{i-1}^{n-1}}{\Delta x}\right) = \frac{1}{2\,\mathrm{Re}}\left(\frac{\hat{u}_{i+1} - 2\hat{u}_i + \hat{u}_{i-1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}\right) \tag{46a}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - \hat{u}_i}{\Delta t} = -\nabla\left(\phi^{n+1}\right) \tag{46b}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{47}$$

$$\nabla^2\left(\phi^{n+1}\right) = \frac{1}{\Delta t}\nabla\hat{u}_i \tag{48}$$